

断裂问题的有限元线法*

胡少伟

南京水利科学研究院 材料结构研究所, 南京 210024

摘要 详述了有限元线法的基本过程, 建立了针对断裂问题的有限元线法, 提出了奇异问题转换为规则问题的奇异结线元映射技术, 并将该技术应用于数个断裂实例中, 得到了高精度的计算结果, 如应力分布、应力强度因子和开裂位移等重要参数. 通过与其他数值方法比较, 证明了该方法的正确性和实用性. 研究工作拓展了有限元线法的应用范畴, 为进行非线性结构断裂力学行为分析提供了一种新的可靠途径.

关键词 有限元线法 含裂缝3D物体 应力强度(SIF) 开裂计算

三维裂纹断裂问题的计算分析已有很多成果, 大部分已被编入应力强度因子计算手册中^[1]. 随着高性能计算机的发展与应用, 涌现了多种数值计算方法. 然而, 绝大多数数值方法仅提供裂缝问题的(局部)近似解, 如有限差分法、有限元法、直接能量法、特征函数扩展法和边界元法等. 多年来大量的研究者尝试了众多的数值方法试图解决断裂力学中裂尖结果奇异问题. 由于绝大多数开裂计算涉及裂尖几何奇异性问题, 用一般数值方法求解较难得到满意的结果^[2,3].

最近发展起来的有限元线法为求解裂纹问题方面特别是三维裂纹问题提供了一种有效途径^[2,3], 有限元线法(finite element method of lines, 简称FEMOL)是一种新型的以常微分方程(ordinary differential equations, 简称ODEs)求解器为支撑软件的半解析数值方法. 在这种方法中, 首先利用有限元技术, 并借助于能量泛函的变分, 将控制偏微分方程半离散化为用结线函数表示的ODEs, 然后选用高质量的ODEs求解器直接求解, 得到满足用户预先设定误差限的解答, 以此作为原问题的近似解答. FEMOL固有的优势是用较为粗糙的网格获得好的精度. 对于几何奇异问题, 给出一项减少奇异技术, 通过这项技术给出裂尖奇异因子, 应用一个

位移公式能够取得满意精度并使得结果不再奇异. 本文的目的是把最近发展的有限元线法用于物体断裂力学性能分析, 建立断裂有限元线法, 并用于实际断裂问题的求解, 通过与其他方法的计算结果进行比较分析, 为进行非线性断裂力学分析提供一种新的可靠途径.

1 FEMOL 基本过程

1.1 区域划分与单元映射

把任三维区域 Ω 划分为一系列四面体单元, 单元形状依赖于单元映射函数. 一般六面体单元的全部12条边界允许是曲边或者直边, 允许在任何区域方便且灵活的建立映射函数.

在FEMOL中从局部坐标系 (ξ, ζ, η) 到整体坐标系 (x, y, z) 的单元映射与有限元方法相同. 用同样的方式建立映射单元的阶数 p ($p=1, 3$ 分别表示线性和立方体单元).

定义下式曲线为单元结线

$$\xi = \xi_i = -1 + 2(i-1)/p \quad (i = 1, 2, \dots, p+1) \quad (1)$$

$$\zeta = \zeta_j = -1 + 2(j-1)/p \quad (j = 1, 2, \dots, p+1) \quad (2)$$

2008-11-01 收稿, 2009-05-21 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 50879048)

** E-mail: hushaowei@nhri.cn

沿 x 方向第 i 条、沿 y 方向第 j 条单元结线记为 L_{ij} . 单元端部边界结线为

$$\eta = \eta_k = -1 + 2(k-1) \quad (k=1,2) \quad (3)$$

沿 z 方向的第 k 个端部结线记为 S_k . L_{ij} 与 S_k 的交点记为 η_{ijk} , 即

$$(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) = L_{ij} \cap S_k \quad (4)$$

单元映射由两步组成: 结线映射与结线插值.

第一步: 结线映射

用参数 η 将任意的整体坐标系中第 i 条结线映射在 $\eta \in [-1, 1]$ 标准线段上, 典型结线 L_i 可表示为

$$\begin{aligned} x &= x_{ij}(\eta), \quad y = y_{ij}(\eta), \\ z &= z_{ij}(\eta) \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \end{aligned} \quad (5)$$

当结线形状相对简单时, 用低阶多项式就能给出合理的近似映射. 典型曲线结线 L_i 由结点 $(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) (k=1, 2, \dots, p+1)$ 分成 p 部分. 用 p 阶 Lagrange 插值多项式近似结线

$$\begin{aligned} x_{ij}(\eta) &= \sum_{k=1}^{p+1} N_k(\eta) x_{ijk}, \quad y_{ij}(\eta) = \sum_{k=1}^{p+1} N_k(\eta) y_{ijk}, \\ z_{ij}(\eta) &= \sum_{k=1}^{p+1} N_k(\eta) z_{ijk} \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} p=1: N_1(\eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta), \\ N_2(\eta) &= \frac{1}{2}(1+\eta) \\ p=3: N_1(\eta) &= \frac{1}{16}(1-\eta)(9\eta^2-1), \\ N_2(\eta) &= \frac{9}{10}(\eta^2-1)(3\eta-1), \\ N_3(\eta) &= -\frac{9}{10}(\eta^2-1)(3\eta+1), \\ N_4(\eta) &= \frac{1}{16}(1+\eta)(9\eta^2-1), \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

如果结线为更复杂类型, 需选用三次样条函数组成分段插值多项式近似.

第二步: 结线插值

当结线映射完成后, 使用局部坐标系 ξ 和 ζ 方向的 Lagrange 插值多项式实现单元映射:

$$x = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} N_i(\xi) N_j(\zeta) x_{ij}(\eta) \quad (8)$$

$$y = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} N_i(\xi) N_j(\zeta) y_{ij}(\eta) \quad (9)$$

$$z = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} N_i(\xi) N_j(\zeta) z_{ij}(\eta) \quad (10)$$

形函数 $N_i(\xi)$ 和 $N_j(\zeta) (i, j=1, 2, \dots, p+1)$ 如方程 (7) 定义所示. 最终的常微分控制方程组 (ODEs) 由局部坐标 η 来定义.

1.2 试函数

单元内位移 u 使用在 ξ 和 ζ 两方向上已知、在 η 方向连续且未知的形函数来近似. 通常选取方程 (7) 定义的 Lagrange 插值多项式作为此类形函数. 位移 u 的试函数用此类形函数表示为

$$u = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} N_i(\xi) N_j(\zeta) d_{ij}(\eta) \quad (11)$$

这里 p 一般不同于单元映射中插值多项式阶数. 方程 (11) 可写为如下矩阵形式

$$u = [N(\xi)]^T \cdot [N(\zeta)] \{d\} = [N] \cdot [d] \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} [N(\xi)] &= [N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad \dots \quad N_{p+1}(\xi)] \\ [N(\zeta)] &= [N_1(\zeta) \quad N_2(\zeta) \quad \dots \quad N_{p+1}(\zeta)] \end{aligned} \quad (13)$$

$[N]$ 和 $[d]$ 分别是形函数矩阵和单元结线位移矩阵.

1.3 Jacobi 矩阵

从单元映射方程 (8), (9) 和 (10), 得到

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} &= [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

其中 Jacobi 矩阵 $[J]$ 是坐标转换矩阵, 由下式表示

$$[J] = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \end{bmatrix} \quad (15)$$

对于标准单元映射, 要求 $[J]$ 是正定的, 否则会导致奇异. $[J]$ 的逆矩阵

$$\frac{1}{|[J]|} \begin{bmatrix} -y_\eta z_\zeta + y_\zeta z_\eta & y_\eta z_\xi - y_\xi z_\eta & -y_\zeta z_\xi + y_\xi z_\zeta \\ x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta & -x_\eta z_\xi + x_\xi z_\eta & x_\zeta z_\xi - x_\xi z_\zeta \\ -x_\eta y_\zeta + x_\zeta y_\eta & x_\eta y_\xi - x_\xi y_\eta & -x_\zeta y_\xi + x_\xi y_\zeta \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中

$$|[J]| = -x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\eta z_\xi + x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\xi y_\eta z_\zeta - x_\zeta y_\xi z_\eta + x_\xi y_\zeta z_\eta \quad (17)$$

微元 dV 能够表示为

$$dV = dx dy dz = J d\xi d\zeta d\eta \quad (18)$$

1.4 能量泛函与变分方程

对应于偏微分方程问题的能量泛函为

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dV - \iiint_\Omega u \bar{f} d\Omega - \int_{\Gamma_N} u \bar{q} ds \quad (19)$$

其中 \bar{f} 为均布面荷载, \bar{q} 为均布线荷载. 把方程(12)代入方程(19), 方程(19)变为

$$\begin{aligned} \Pi(\{d\}) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{d'\}^T [A] \{d'\} + 2\{d'\}^T [B] \{d\} + \\ & \{d\}^T [C] \{d\} d\eta - \int_{-1}^1 \{d\}^T \{F\} d\eta - \\ & \sum_{j=1}^2 \{d(\eta_j)\}^T \{P_j\} \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\{F\} = \{F_A\} + \{F_L\}$, $\{F_A\} = \int_{-1}^1 [N] \bar{f} J d\xi$, $\{F_L\} = \{J_{L_1} \bar{q}_{L_1}, 0, L, 0, J_{L_{P+1}} \bar{q}_{L_{P+1}}\}$.

组集所有单元能量泛函, 取一阶变分为 0, 即

$\delta \Pi(\{d\}) = 0$, 得到虚功方程为

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\{d\}) = & - \int_{-1}^1 \{\delta d\}^T ([A] \{d'\} + [G] \{d'\} + \\ & [H] \{d\} + \{F\}) d\eta + \\ & \sum_{j=1}^2 \eta_j \{\delta d(\eta_j)\}^T (\{Q_j\} - \eta_j \{P_j\}) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\{P_j\} = \int_{-1}^1 [N]^T \bar{q}_s J_s d\xi, \bar{q}_s \equiv \bar{q}|_{s_j}$, $\{Q_j\} = [A] \{d'\} + [B] \{d\}$. 因此

$$[A] \{d'\} + [G] \{d'\} + [H] \{d\} + \{F\} = \{0\} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} [A] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a(\xi, \zeta, \eta) [N] \cdot [N] d\xi d\zeta, \\ a(\xi, \zeta, \eta) &= [y_\xi^2 + x_\xi^2 + z_\xi^2] / [J], \\ [B] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 b(\xi, \zeta, \eta) [N]^T \cdot [N'] d\xi d\zeta, \\ b(\xi, \zeta, \eta) &= -[z_\eta z_\zeta z_\xi + y_\eta y_\zeta y_\xi + x_\eta x_\zeta x_\xi] / [J], \\ [C] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 c(\xi, \zeta, \eta) [N']^T \cdot [N] d\xi d\zeta, \\ c(\xi, \zeta, \eta) &= [x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2] / [J], \\ [G] &= [A'] + [B] - [B]^T, [H] = [B'] - [C]. \end{aligned}$$

2 断裂有限元线法

材料应变与位移的关系一般表现为矩阵形式^[4,5]

$$[\epsilon] = [L] \cdot [U] \quad (23)$$

其中

$$[\epsilon] = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \{U\} = \{u, v, w\}^T \quad (24)$$

这里, $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ 为应变矢量, $[\mathbf{L}]$ 是线性微分算子矩阵. 由方程(14), 矩阵 $[\mathbf{L}]$ 分为三部分

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{L}_1] \frac{\partial}{\partial \xi} + [\mathbf{L}_2] \frac{\partial}{\partial \zeta} + [\mathbf{L}_3] \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (25)$$

其中

$$[\mathbf{L}_1] = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} -y_\eta z_\xi + y_\zeta z_\eta & 0 & 0 \\ 0 & x_\eta z_\xi - x_\zeta z_\eta & 0 \\ 0 & 0 & -x_\eta y_\xi + x_\zeta y_\eta \\ x_\eta z_\xi - x_\zeta z_\eta & -y_\eta z_\xi + y_\zeta z_\eta & 0 \\ -x_\eta y_\xi + x_\zeta y_\eta & 0 & -y_\eta z_\xi + y_\zeta z_\eta \\ 0 & -x_\eta y_\xi + x_\zeta y_\eta & x_\eta z_\xi - x_\zeta z_\eta \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{L}_2] = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_\eta z_\xi - y_\zeta z_\eta & 0 & 0 \\ 0 & -x_\eta z_\xi + x_\zeta z_\eta & 0 \\ 0 & 0 & x_\eta y_\xi - x_\zeta y_\eta \\ -x_\eta z_\xi + x_\zeta z_\eta & y_\eta z_\xi - y_\zeta z_\eta & 0 \\ x_\eta y_\xi - x_\zeta y_\eta & 0 & y_\eta z_\xi - y_\zeta z_\eta \\ 0 & x_\eta y_\xi - x_\zeta y_\eta & -x_\eta z_\xi + x_\zeta z_\eta \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{L}_3] = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} -y_\zeta z_\xi + y_\xi z_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & x_\zeta z_\xi - x_\xi z_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & -x_\zeta y_\xi + x_\xi y_\zeta \\ x_\zeta z_\xi - x_\xi z_\zeta & -y_\zeta z_\xi + y_\xi z_\zeta & 0 \\ -x_\zeta y_\xi + x_\xi y_\zeta & 0 & -y_\zeta z_\xi + y_\xi z_\zeta \\ 0 & -x_\zeta y_\xi + x_\xi y_\zeta & x_\zeta z_\xi - x_\xi z_\zeta \end{bmatrix} \quad (26)$$

由 $\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})]^T \cdot [\mathbf{N}(\boldsymbol{\zeta})] \{\mathbf{d}\}^e = [\mathbf{N}] \cdot \{\mathbf{d}\}^e$, 进一步把应变矢量表示为

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{E}_1] \{\mathbf{d}\} + [\mathbf{E}_2] \{\mathbf{d}\} + [\mathbf{E}_3] \{\mathbf{d}'\} \quad (27)$$

其中

$$[\mathbf{E}_1] = [\mathbf{L}_1] \cdot [\mathbf{N}'], \quad [\mathbf{E}_2] = [\mathbf{L}_2] \cdot [\mathbf{N}'],$$

$$[\mathbf{E}_3] = [\mathbf{L}_3] \cdot [\mathbf{N}] \quad (28)$$

称为单元应变矩阵.

由广义 Hooke 定律, 应力—应变关系可表示为矩阵形式

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (29)$$

其中

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix},$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (30)$$

这里 E 为弹性杨式模量, ν 为 poisson 比. 类似的, 把 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ 称为应力矢量, $[\mathbf{D}]$ 称为弹性矩阵.

应力矢量能够进一步表示为

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{S}_1] \{\mathbf{d}\} + [\mathbf{S}_2] \{\mathbf{d}\} + [\mathbf{S}_3] \{\mathbf{d}'\} \quad (31)$$

其中

$$[\mathbf{S}_1] = [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_1], \quad [\mathbf{S}_2] = [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_2],$$

$$[\mathbf{S}_3] = [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_3] \quad (32)$$

类似的, $[\mathbf{S}_1]$, $[\mathbf{S}_2]$, $[\mathbf{S}_3]$ 称为单元应力矩阵. 应力与应变矢量关系和应力与应变矩阵关系采用相同的形式.

由 (x, y, z) 坐标系表示的单元总势能

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dA -$$

$$\iint_{\Omega_e} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{q}\} dA - \sum_{i=1, p+1}^2 \int_{L_i} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{q}_L\}_i ds -$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_{S_j} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{q}_S\}_j ds - \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^2 \{\mathbf{u}\}_{n_{ij}} \{\mathbf{P}\}_{ij} \quad (33)$$

其中 \mathbf{q} 为单元均布面荷载, $\{\mathbf{q}\} = \{q_x, q_y\}^T$, \mathbf{q}_L 为单元边界节点线 L_i 的线荷载, $\{\mathbf{q}_L\}_i = \{q_x(\eta), q_y(\eta)\}_{L_i}^T$, $i=1, p+1, \mathbf{q}_S$ 为单元边界 S_j 线荷载, $\{\mathbf{q}_S\}_j = \{q_x(\xi),$

$\mathbf{q}_s(\xi) \}_L^T, j=1,2.$

方程(33)第一项代表应变能, 其他项代表由实际荷载作用引起的势能. 经过必要的矩阵计算, 方程(33)第一项分解为

$$\frac{1}{2} \iint \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\{\mathbf{d}'\}^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{d}'\} + 2\{\mathbf{d}'\} [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{C}] \{\mathbf{d}\}) d\eta \quad (34)$$

因此, 方程(33)变为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\{\mathbf{d}'\}^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{d}'\} + 2\{\mathbf{d}'\} [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{C}] \{\mathbf{d}\}) d\eta - \int_{-1}^1 \{\mathbf{d}\}^T \{\mathbf{F}\} d\eta - \sum_{j=1}^2 \{\mathbf{d}(\eta_j)\}^T \{\mathbf{P}_j\} \quad (35)$$

其中,

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{E}_3]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_3] \mathbf{J} d\xi d\zeta, \\ [\mathbf{B}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([\mathbf{E}_3]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_1] + [\mathbf{E}_3]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_2]) \mathbf{J} d\xi d\zeta, \\ [\mathbf{C}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2[\mathbf{E}_2]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_1] + [\mathbf{E}_2]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_2] + [\mathbf{E}_1]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{E}_1]) \mathbf{J} d\xi d\zeta, \\ \{\mathbf{F}\} &= \{\mathbf{F}_A\} + \{\mathbf{F}_L\}, \quad \{\mathbf{F}_A\} = \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{q}\} \mathbf{J} d\xi, \\ \{\mathbf{F}_L\} &= [\mathbf{J}_L] \{\mathbf{q}_L\}, \\ \{\mathbf{P}_j\} &= \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{q}_s\}_j \mathbf{J}_s d\xi \quad (\eta = \eta_j \quad j = 1, 2), \\ [\mathbf{J}_L] &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L_1} [\mathbf{I}]_{2 \times 2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_{L_{p+1}} [\mathbf{I}]_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \\ \{\mathbf{q}_L\} &= \{\{\mathbf{q}_{L_1}\}^T \quad \{0\} \quad \cdots \quad \{0\}^T \quad \{\mathbf{q}_{L_{p+1}}\}^T\}^T, \\ \{\mathbf{P}_j\}_j &= \{\{\mathbf{P}_1\}^T \quad \{0\}^T \quad \cdots \quad \{0\}^T \quad \{\mathbf{P}_{p+1}\}^T\}^T. \end{aligned}$$

类似有限元法, 通过组集所有的单元获得整体区域的总势能, 并进行变分, 结果表示为

$$\delta \Pi(\{\mathbf{d}\}) = \sum_c \delta \Pi(\{\mathbf{d}\}) \quad (36)$$

得到

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{d}''\} + [\mathbf{G}]\{\mathbf{d}'\} + [\mathbf{H}]\{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{F}\} = \{0\} \quad (37)$$

其中 $[\mathbf{G}] = [\mathbf{A}'] + [\mathbf{B}] - [\mathbf{B}]^T$, $[\mathbf{H}] = [\mathbf{B}'] - [\mathbf{C}]$.

3 奇异结线元映射计算

本文给出一项奇异减少技术, 可以把开裂计算奇异问题转换为规则问题, 同时获得奇异因子. 取第Ⅲ类断裂问题为例, 其解 u 要满足 Laplace 方程 (平衡方程)^[5,6].

$$\nabla^2 u = 0, \text{ 两边自由边: } \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (38)$$

上述奇异解能写为^[3]

$$u = \sum_{k=0,1,2,\dots} a_k (r^{\lambda/2})^k g_k(\theta) \quad (39)$$

在半径方向, u 是 $r^{\lambda/2}$ 的多项式或者无穷级数, 其导数在裂尖奇异. 用插值多项式来近似它是非常困难的. 而在圆周方向 u 是解析且平滑的, 容易选取插值多项式来近似. 因 FEMOL 形函数与 ODEs 求解器 COLSYS 本质上都是由插值多项式来近似, 如能把半径方向的奇异解转换成参数 η 的多项式或者是参数 η 的无穷级数将能够消除半径方向的解奇异. 下面给出的结线映射技术能实现这个目的.

基于实际解在半径方向是 $r^{\lambda/2}$ 的多项式, 令

$$\eta = -1 + 2(r/L)^{\lambda/2} \quad (40)$$

其中, L 是涉及的半径长度. 上式的反函数为

$$r = L \left(\frac{\eta+1}{2} \right)^{2/\lambda} \quad (41)$$

用下列映射关系把第 i 结线从整体坐标映射到极坐标

$$\begin{aligned} x_i(\eta) &= x_{i1} + (x_{i2} - x_{i1}) \left(\frac{\eta+1}{2} \right)^{2/\lambda}, \\ y_i(\eta) &= y_{i1} + (y_{i2} - y_{i1}) \left(\frac{\eta+1}{2} \right)^{2/\lambda}, \\ z_i(\eta) &= z_{i1} + (z_{i2} - z_{i1}) \left(\frac{\eta+1}{2} \right)^{2/\lambda} \end{aligned} \quad (42)$$

插入上式映射关系到方程(39), 奇异解变为

$$u = \sum_{k=0,1,2,\dots} a_k (\eta+1)^k g_k(\theta) \quad (43)$$

因此, 这个奇异结线映射不仅把整体结线元映射到标准局部直线, 而且也消除了实际解的奇异性质. 实际解变成了局部坐标系下的普通多项式或者无穷级数, 导致 FEMOL 能够容易且精确地求解.

3.1 三种断裂模型的求解

3.1.1 断裂模型 I 和模型 II 结构断裂模型采用极坐标 (r, θ) 系, 原点为裂尖点 o , 相互交叉边界线为线 $\theta = \pm \frac{\alpha}{2}$. 位移场设定为如下形式

$$u(r, \theta) = r^\lambda u(\theta)^{\lambda/2}, v(r, \theta) = r^\lambda v(\theta) \quad (44)$$

应力的表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= B(\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) = Br^{\lambda-1} [\lambda u + v(u + v')], \\ \sigma_\theta &= B(\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r) = Br^{\lambda-1} [\nu \lambda u + (u + v')], \\ \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta} = Gr^{\lambda-1} [u' + (\lambda - 1)v] \end{aligned} \quad (45)$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (46)$$

受力平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (48)$$

记 poisson 比 ν 为 α (为避免与竖向位移混淆). 将方程(45)代入(47), (48)得到

$$Gu'' + [B(\lambda^2 - 1)u + B(\alpha\lambda - 1) + G(\lambda - 1)]v' = 0 \quad (49)$$

$$Bv'' + G(\lambda^2 - 1)v + [B(\lambda\nu - 1) + G(\lambda + 1)]u' = 0 \quad (50)$$

考虑可能存在复数解, 给出以下的特征值和特征函数

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2 \quad (51)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$. 代入(49)得

$$G(u''_1 + iu''_2) + B(\lambda^2 - 1)(u_1 + iu_2) + [B(\alpha\lambda - 1) + G(\lambda - 1)]v' = 0 \quad (52)$$

从(52)式的实部和虚部可以得到:

$$\begin{aligned} u''_1 &= -\frac{B}{G}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 1)u_1 + \frac{B}{G}2\lambda_1\lambda_2u_2 - \\ & \left[\frac{B}{G}(\alpha\lambda_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) \right] v'_1 + \lambda_2 \left(1 + \alpha \frac{B}{G} \right) v'_2 \end{aligned} \quad (53a)$$

$$\begin{aligned} u''_2 &= -\frac{B}{G}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 1)u_2 - \frac{B}{G}2\lambda_1\lambda_2u_1 - \\ & \left[\frac{B}{G}(\alpha\lambda_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) \right] v'_2 - \lambda_2 \left(1 + \alpha \frac{B}{G} \right) v'_1 \end{aligned} \quad (53b)$$

把(51)式代入(50)式, 并写出实数和虚数部分:

$$\begin{aligned} v''_1 &= -\frac{G}{B}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 1)u_1 + \frac{G}{B}2\lambda_1\lambda_2u_2 - \\ & \left[\frac{G}{B}(\lambda_1 + 1) + (\alpha\lambda_1 + 1) \right] u'_1 + \lambda_2 \left(\nu + \frac{G}{B} \right) u'_2 \end{aligned} \quad (54a)$$

$$\begin{aligned} v''_2 &= -\frac{G}{B}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 1)u_2 - \frac{G}{B}2\lambda_1\lambda_2u_1 - \\ & \left[\frac{G}{B}(\lambda_1 + 1) + (\alpha\lambda_1 + 1) \right] u'_2 - \lambda_2 \left(\nu + \frac{G}{B} \right) u'_1 \end{aligned} \quad (54b)$$

应用 COLSYS 软件, 通过设定特征值 $\lambda'_1 = 0$ 和 $\lambda'_2 = 0$, 得出它们都是常数并归纳在 ODEs 的方程组中.

3.1.2 模型 III u 的解满足 Laplace 方程数值解

$$\nabla^2 u = 0, \theta = \pm \pi, \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (55)$$

当利用 FEMOL 代码时, 需要用户提供一个初始解. 本例采用 λ_1 和 λ_2 的正余弦值作为它们的初始解.

图 1 给出模型 I, II 和 Williams 解的特征值的比较^[4], 图 2、图 3 分别给出模型 I 和模型 III 的无量纲的位移和应力分布.

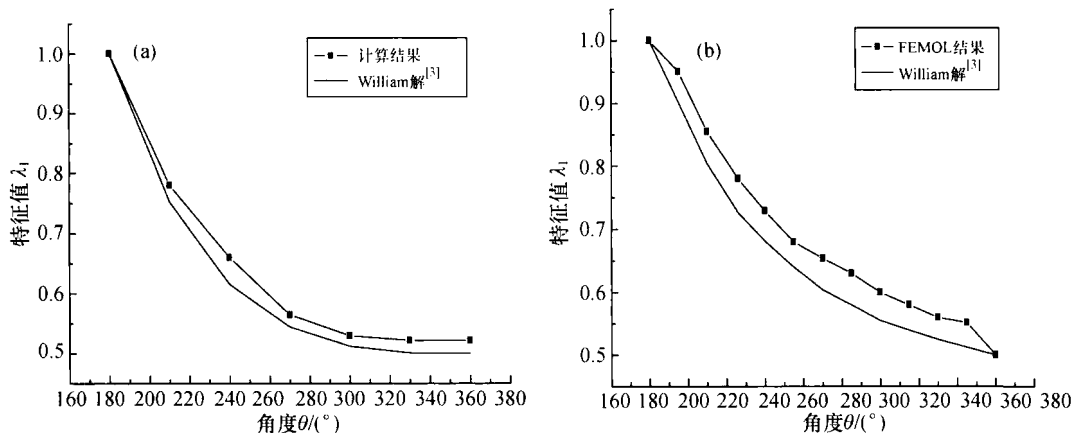


图1 模型 I、模型 II 的特征值
(a) 模型 I; (b) 模型 II

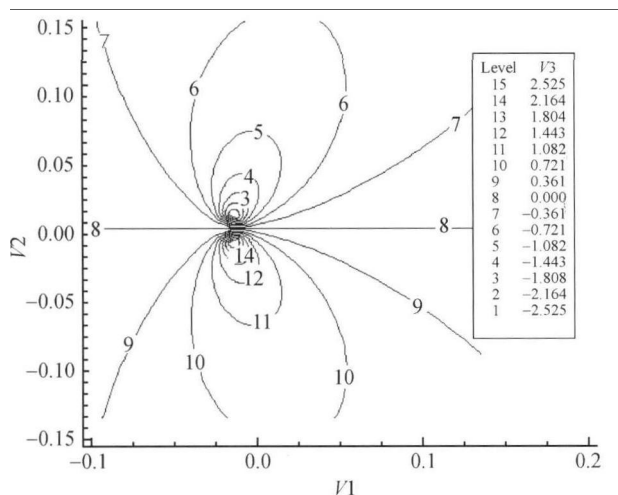


图2 模型 I 中的剪应力 τ 分布

在 Williams 的解析特征方程组插入数值解^[4], 数值解和解析解之间的误差小于 8%。

3.2 FEMOL 应用于边界开裂的受拉试件的计算分析

因为几何和荷载的对称性, 几何尺寸为 $W/a = 2$, $L/a = 13.5$. 取 $G = \frac{E}{2(1-\nu)}$, $\sigma = 1000$. 边界开裂的受拉试件应力分布如图 4 所示。

图 5 给出了边界开裂受拉试件及其随 a/W 变化的应力分布。

从图 5 知, 最大无量纲正应力为 $\sigma_{max}/\sigma_0 = 2.05$, 获得的应力强度因子(SIF)依赖于裂缝长度(COD). 从图 6 可以看出, FEMOL 结果与 FEM 解^[5]非常符合, 两者的误差小于 8%。

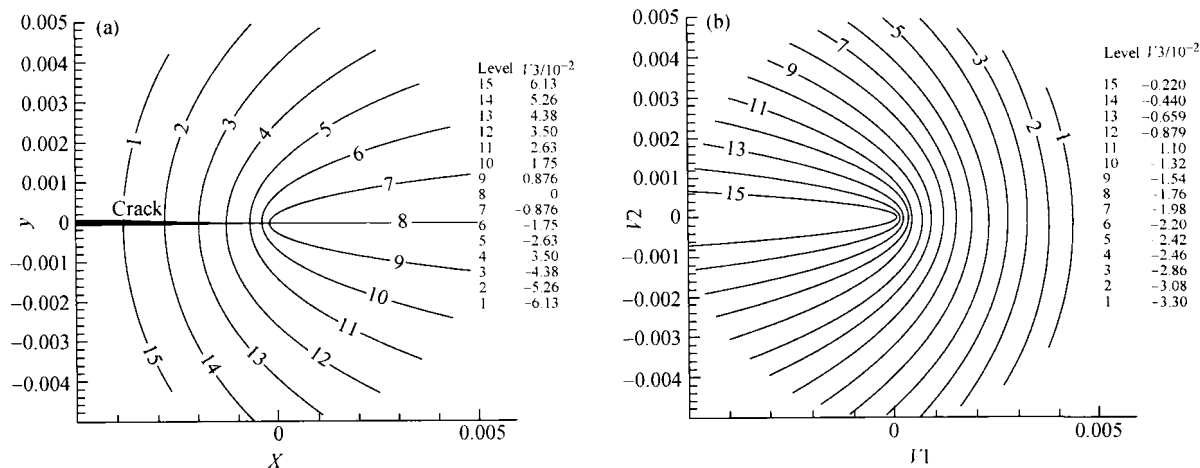


图3 模型 III 中位移和剪应力的分布
(a) 位移分布; (b) 剪应力分布

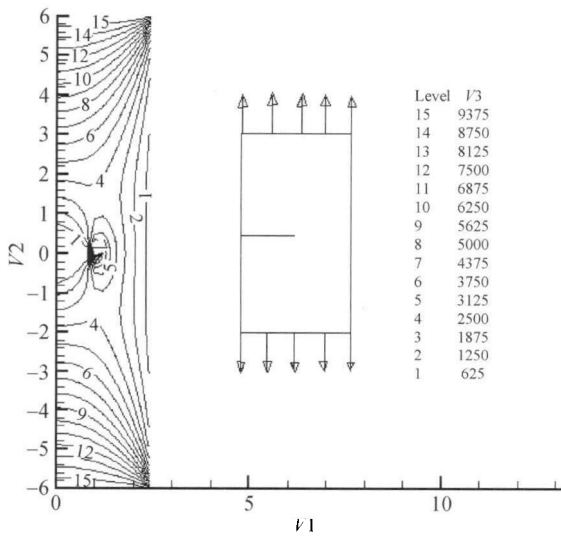


图4 边界开裂的受拉试件应力分布

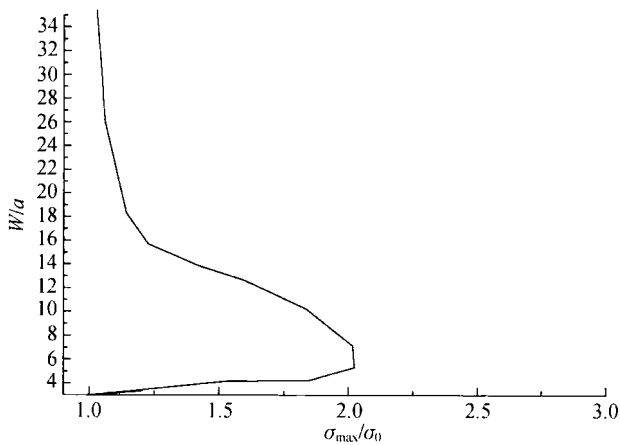


图5 $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}$ 随 W/a 变化图

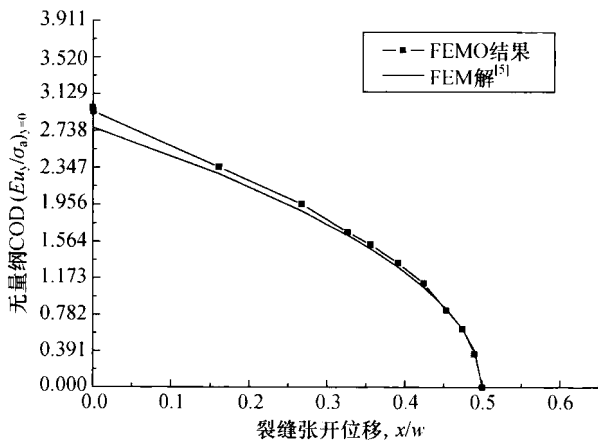


图6 沿 x/W 方向的 COD ($a/W=0.5$)

3.3 含有中心裂缝的上下两端受拉板

图7是含有中心裂缝的上下两端受拉板示意图,其裂缝长度与应力强度因子的变化关系如图8所示.应力强度因子 K_I 由下列公式给出^[6,7]

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \right]^{1/2} \left[1 - 0.025\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.06\left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad (56)$$

在图8中,上述解析解与本文的计算值进行了分析对比,结果符合较好,误差在1%到7%之间.

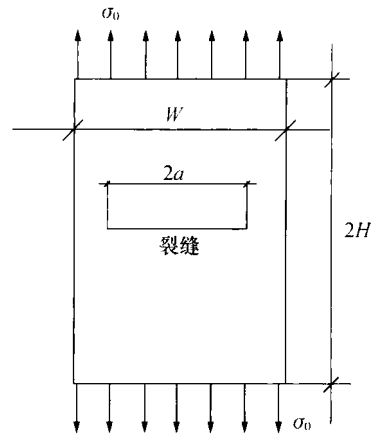


图7 上下两端受拉板

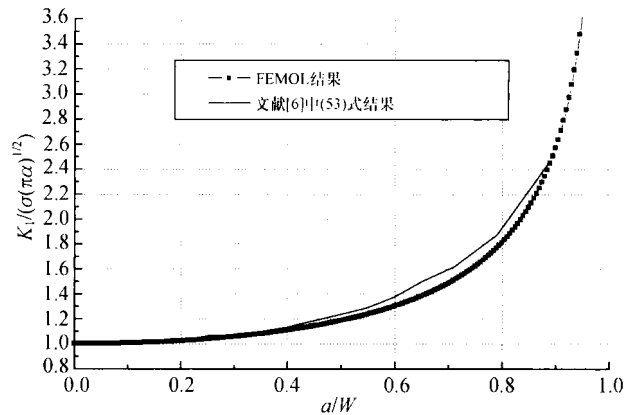


图8 裂缝长度与应力强度因子的关系对比图

4 结论

FEMOL为断裂问题的求解提供了一种新型实用且直接的分析方法.这种方法能够显著地增加解的精度,加快收敛速度,避免开裂计算的奇异问题.

不像有限元方法是用一系列的代数方程来近似偏微分方程组的^[8-10], FEMOL 是用一系列的常微分方程组(ODEs)来做近似的, 故 FEMOL 方法不但克服了 FEM 方法对区域过分离散而导致的离散误差过大、精度过分依赖网格划分、数据准备工作量大等缺点, 同时, 又最大程度的保留了有限元法对结构形状、荷载形式、材料种类以及边界条件的良好适应性和灵活性.

FEMOL 方法作为一种新型的“区域法”, 在处理域内物理量的不均匀性方面显然比边界元法(BEM)优越^[11-12], 而且具有降维的特点. 尽管 FEMOL 计算出的断裂 SIF 值与基于裂缝长度的差分法理论预测值比较接近, 但 FEMOL 可在大幅度减少计算时间的情况下给出相对精确的解.

综上所述, 基于 COLSYS 求解器, FEMOL 仅要求编制相对易懂的扩展程序就能计算求解, 原则上只要边界条件描述准确, 总能得到令人满意的解答. 因此, 具有独特内在优点的 FEMOL 可作为一个更实用、更准确易懂的方法分析粗糙网格下的三维裂缝问题. 而且, FEMOL 还可有效地解决其他问题, 如复合材料、弹塑性材料等开裂问题.

参 考 文 献

1 中国航空研究院. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社,

1993, 10-25

- 2 胡少伟. 钢-混凝土组合梁抗扭开裂性能分析. 清华大学博士学位论文, 北京, 1999
- 3 Yuan S. The Finite Element Method of Lines—Theory and Applications. New York, Beijing: Science Press, 1994, 8-18
- 4 Williams ML. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*, 1952, 19(4): 526-528
- 5 胡少伟. 结构振动理论及其应用. 北京: 中国建筑出版社, 2005, 60-72
- 6 Anderson AL. *Fracture Mechanics-Fundamentals and Applications*, Second Edition. CRC Press, 1995, 30-65
- 7 Chell GC. The stress analysis on the solid with multi-cracks. *International Journal of Fracture*, 1976, 12: 33-46
- 8 Lancaster JF, Pederson A. Application of statistical linear elastic fracture mechanics to pressure vessel reliability analysis. *Nuclear Engineering and Design*, 1985, 27: 357-367
- 9 Aithocine N. Experimental and numerical investigation on single specimen methods of determination of J in rubber materials. *International Journal of Fracture*, 1998, 94: 321-338
- 10 Deng Q. Effects of piezoelectric on the 3D crack-tip stress fields of near crack. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 24(1): 53-60
- 11 Gladwell GML, Fan TY. Galin's theorem holds for a moving punch. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 7(1): 165-171
- 12 Zhang TY. Fracture mechanics for mode II crack in a piezoelectric material. *Solids Structures*, 1996, 33: 343-359